Сделаем более подробный вывод уравнений сохранения с учётом некоторых дополнительных членов.

В теплогидравлическом коде рассматривается смещённая сетка. При этом скалярные характеристики теплоносителя (давление, энтальпия, концентрация) находятся в узлах центрах конечных объёмов, а векторные характеристики теплоносителя (скорости, расходы) – на границах конечных объёмов (в гидравлических связях).

Предположим, что значения скалярных характеристик теплоносителя остаются постоянными в пределах контрольного объёма, и меняются скачком на границе ячеек, а значения векторных характеристик теплоносителя остаются постоянными в пределах левого и правого полуобъёмов, примыкающих к гидравлической связи, и меняются скачком в центрах ячеек.

Нумерация объектов в ребре в ТГ коде начинается от нуля, поэтому для j-й ГС левая и правая ячейки будут иметь номера j-1 и j. В интегральные аналоги уравнений сохранения будут входить значения параметров теплоносителя на границах расчётных ячеек. Для начала предположим в общем виде, что значение на границе зависит от значений в соседних ячейках согласно следующей зависимости:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

где – значение величины на j-й границе;

– значение величины в (j-1)-ой расчётной ячейке (слева от j-й ГС);

– значение величины в j-ой расчётной ячейке (справа от j-й ГС);

– весовой множитель.

Рассмотрим уравнения сохранения.

**Уравнение сохранения массы**

Дифференциальное уравнение сохранения массы имеет следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

где – плотность; – время; – скорость.

В одномерном случае (2) превращается в

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

Это уравнение верно для элементарного объёма, но если рассмотреть специфический случай канала с переменным поперечным сечением, то можно прийти к другому уравнению:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Раскроем производные в (4) и заменим произведение на – массовый расход:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Разделим (5) на площадь и заменим производную плотности согласно уравнению состояния. Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

Проинтегрируем (6) в пределах контрольного объёма:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

Четвёртое слагаемое в (7) интегрируется следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

Остальные члены интегрируются тривиально. Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

Разделим (9) на длину ячейки. Кроме того, будем считать, что площадь канала во времени может изменяться по двум причинам: из-за заданного внешнего изменения (например, изменение площади регулируемого дросселя) и из-за изменения, связанного с изменением давления теплоносителя при учёте конечной жёсткости трубы. Тогда член можно переписать следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

Тогда (9) перепишется следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

Оставим в левой части слагаемые с производной давления, а остальные перенесём в правую часть. Тогда получим окончательно уравнение сохранения массы для контрольного объёма в виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

**Уравнение сохранения импульса**

Общее уравнение движения жидкой среды (уравнение Эйлера) имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

Проекция на ось x:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

Подставим вместо проекцию силы тяжести, действующей на единицу массы жидкости, на ось x: , где – угол между осью канала и направлением вектора g.

Поскольку скорость жидкости направлена только вдоль ось x, то от тройной суммы остаётся только одно слагаемое. Добавим в правую часть уравнения ещё источник импульса и член, связанный с потерей импульса из-за трения. Получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15) |

Умножим уравнение (15) на плотность и проинтегрируем его по двум полуобъёмам, примыкающим к рассматриваемой гидравлической связи слева (индекс j-1) и справа (индекс j):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

Заменим везде в (16) скорость на массовый расход: Получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (17) |

Раскроем все производные:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (19) |

Предполагаем, что на рассматриваемом интервале интегрирования массовый расход остаётся постоянным. Перепишем (17), подставив туда найденные производные, в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (20) |

Проинтегрируем последовательно все члены, входящие в (20):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (21) |

где через мы обозначили инерционный коэффициент гидравлической связи. Рассмотрим следующий интеграл:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (22) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (23) |

Перепишем интеграл (23) с учётом изменения площади во времени по двум причинам следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (24) |

Рассмотрим следующий интеграл с производной расхода по длине:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (25) |

Необходимо каким-либо образом аппроксимировать расход в серединах контрольных объёмов (на границах полуобъёмов). Сделаем это также при помощи весового множителя :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (26) |

Подставляем выражения (26) в (25):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (27) |

Берём следующий интеграл с производной плотности по длине:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (28) |

Кроме того, и . Необходимо как-то аппроксимировать плотность теплоносителя на границе ячеек (в гидравлической связи). Запишем в общем случае согласно уравнению (1)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (29) |

Тогда интеграл (28) примет следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (30) |

Рассмотрим следующий интеграл c производной площади по длине:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (31) |

Справедливо следующее:

Аппроксимируем площадь на границе ячеек (площадь гидравлической связи) с использованием весового множителя :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (32) |

Тогда интеграл (31) перепишется в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (33) |

Рассмотрим следующий интеграл:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (34) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (35) |

Рассмотрим следующий интеграл:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (36) |

Наконец, последний интеграл переобозначим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (37) |

Подставим все вычисленные интегралы в исходное уравнение (20). Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (38) |

Оставим в левой части производную от массового расхода в гидравлической связи по времени, а остальные члены перенесём в правую часть. Тогда получим окончательно уравнение сохранения импульса для гидравлической связи в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (39) |

Найдём значение весового множителя в предположении, что параметр по длине между центрами расчётных ячеек изменяется линейно. Если расположить начало координат в гидравлической связи, то можно получить следующее выражение для линейной зависимости параметра от длины между центрами соседних ячеек:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (40) |

Соответственно, в гидравлической связи, т.е. при x=0, будем иметь

|  |  |
| --- | --- |
|  | (41) |

Сравнивая полученное выражение с (1), найдём, что для линейного изменения

|  |  |
| --- | --- |
|  | (42) |

**Уравнение сохранения энергии**

Исходное дифференциальное уравнение сохранения энергии для элементарного объёма имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  | (43) |

где – внутренняя энергия; – мощность объёмных источников энерговыделения; – вектор теплового потока, выходящего из рассматриваемого объёма.

Заменим внутреннюю энергию через энтальпию:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (44) |

Запишем проекцию (43) на ось канала:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (45) |

где – тепловой поток, направленный вдоль оси канала; – тепловой поток, направленный перпендикулярно оси канала (поперечный тепловой поток).

Выразим работу внешних сил из уравнения сохранения импульса:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (46) |

Подставим силу из (46) в (45) и раскроем производные:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (47) |

Далее раскрываем производные, приводим подобные слагаемые и умножаем уравнение на плотность . Получаем

|  |  |
| --- | --- |
|  | (48) |

Далее следует неочевидный переход, который я для себя не могу строго объяснить, но который, тем не менее, приводит к правильному результату. Положим, что уровень отсчёта внутренней энергии выбран так, что . В этом случае . Заменим отношение давления к плотности на энтальпию во 2 и 4 слагаемых (48), а в 5 слагаемом заменим давление на произведения энтальпии на плотность. Тогда получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (49) |

Группируем слагаемые в первых и вторых скобках:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (50) |

Полученное уравнение можно переписать в таком виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (51) |

Такая запись проясняет физический смысл уравнения сохранения энергии. Член в левой части имеет размерность [Дж/(м3∙с)] и означает изменение энтальпии в элементарном объёме за единицу времени. Первое слагаемое в правой части есть изменение энтальпии за счёт втекания и вытекания теплоносителя через поверхность объёма. Член отвечает за изменение энтальпии при изменении давления. есть работа сил давления. Мы хотим в уравнении (50) перейти от скорости к массовому расходу. Можно показать (подобно тому, как это сделано в уравнении для концентрации пассивной примеси, см. дальше по тексту), что в канале переменного поперечного сечения при отсутствии других источников изменения энтальпии, кроме втекания и вытекания теплоносителя, справедливо следующее уравнение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (52) |

Для нас это означает, что можно в уравнении (50) как бы внести площадь под знаки производных в первых двух слагаемых, поскольку изменение площади по длине не влияет на удельную энтальпию. Тогда, заменив произведение на – массовый расход, можно переписать уравнение (50) следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (53) |

Представим первый член в виде трёх слагаемых и заменим производную по уравнению сохранения массы (6):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (54) |

Подставляем (54) в (53) и раскладываем в (53) второй член по формуле производной произведения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (55) |

Первое слагаемое в первых скобках сокращается. В результате получается следующее уравнение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (56) |

В результате удачно сократились члены, связанные с изменением площади проходного сечения канала во времени и по длине.

Проинтегрируем (56) по длине контрольного объёма:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (57) |

Рассмотрим вычисление интегралов в (57).

|  |  |
| --- | --- |
|  | (58) |

Необходимо сюда подставить значения энтальпии на границах ячейки. Предположим, что они выражаются по уравнению вида (1):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (59) |

Тогда (58) примет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (60) |

Рассмотрим следующий интеграл с производной давления по длине:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (61) |

Интеграл от теплового потока:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (62) |

Подставляем все найденные интегралы в уравнение (57). Получаем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (63) |

Умножим (63) на площадь ячейки и оставим в левой части производную энтальпии по времени. Тогда получим уравнение сохранения энергии в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (64) |

Обозначим

– тепловыделение в объёме теплоносителя;

– осевой тепловой поток;

– тепловой поток на стенке канала.

Тогда окончательно получим уравнение сохранения энергии для контрольного объёма в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (65) |

Получим уравнения для осевого теплового потока. По определению тепловой поток есть . Аппроксимируем его следующей разностной схемой:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (66) |

где и – значения теплопроводности жидкости на границах контрольного объёма.

Предположим, что теплопроводность по длине изменяется линейно. Тогда на границах будем иметь:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (67) |

Подставляя (67) в (65), получим следующее выражение для осевого теплового потока:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (68) |

Можно несколько сократить запись, раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (69) |

**Уравнение сохранения массы пассивной примеси**

Предположим, что в теплоносителе содержится пассивная примесь с концентрацией , размерность которой есть [кг/кг] (то есть это количество примеси, содержащееся в единице массы теплоносителя). Рассмотрим канал с изменяющейся по длине площадью поперечного сечения. Выделим в канала двумя сечениями с координатами и элементарный объём. Тогда изменение массы пассивной примеси в этом объёме за время будет равняться:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (70) |

С другой стороны, с учётом втекания и вытекания теплоносителя через боковые поверхности выделенного объёма, изменение массы можно записать в виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (71) |

Приравнивая (70) и (71), получим исходное дифференциальное уравнение для концентрации пассивной примеси в канале переменного поперечного сечения:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (72) |

Раскроем производные и подставим вместо её выражение из уравнения сохранения массы (6):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (73) |

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим следующее уравнение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (74) |

Добавим ещё в правую часть уменьшение концентрации, вызванное экспоненциальным распадом примеси:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (75) |

Кроме того, добавим в правую часть объёмный источник или сток примеси с размерностью [кг/кг/с]. Тогда уравнение для концентрации примет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (76) |

Проинтегрируем полученное уравнение в пределах контрольного объёма:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (77) |

Рассмотрим второй член:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (78) |

Представляем концентрации на границах контрольного объёма по уравнению вида (1):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (79) |

Подставляем (79) в (78) и получаем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (80) |

Получаем тогда интеграл (77) в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (81) |

Оставим в левой части член с производной концентрации по времени и получим окончательно уравнение для концентрации пассивной примеси в ячейке в виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (82) |

**Преобразование уравнений к конечно-разностному виду**

**Уравнение сохранения массы**

Рассмотрим уравнение сохранения массы в форме (12), где расходы и производные давления и энтальпии берутся на следующем шаге по времени:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (83) |

Заменим производные на следующем шаге по времени по формуле дифференцирования назад через приращения искомых величин:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (84) |

Расходы на следующем шаге по времени запишем через значения на предыдущем шаге и приращение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (85) |

Площадь проходного сечения ячейки будем брать на предыдущем шаге по времени, а плотность теплоносителя будем обновлять на каждой итерации метода Ньютона-Рафсона. Тогда уравнение (83) перепишется в виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (86) |

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые, выделив множители перед приращениями неизвестных величин. Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (87) |

Умножим уравнение на и запишем через коэффициенты:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (88) |

где

Если записать это уравнение в виде, пригодном для решения методом Ньютона-Рафсона, то получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (89) |

где

**Уравнение сохранения импульса**

Рассмотрим уравнение сохранения импульса в форме (39). Если расписать в первом члене производную плотности по времени в ячейках, соседних с гидравлической связью, через производные давления и энтальпии по времени, то в уравнении появятся производные энтальпий в соседних ячейках. В свою очередь, эти энтальпии по уравнению (65) зависят от входящих и выходящих расходов для ячейки, поэтому в уравнении (39) расход будет зависеть от расходов в соседних гидравлических связях. Учёт связи расходов в соседних ГС приводит к усложнению и не позволяет получить трёхточечное уравнение для давлений, которое лежит в основе используемого нами расчётного метода. Самым простым способом избежать этих сложностей, но всё-таки учесть производную плотности по времени и производную является использование этих величин с предыдущего шага по времени (по явной схеме). Расставим в уравнении (39) временные индексы:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (90) |

Записываем производные по ФДН, а величины на следующем шаге по времени записываем через величины на предыдущем шаге и приращения. Для сокращения записи введём следующие обозначения:

Вместо источника импульса подставим напор насоса. Перепишем (90) с учётом введённых обозначений в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (91) |

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые, выделив множители перед приращениями неизвестных величин. Напор насоса запишем через значение на предыдущем шаге по времени и производную напора по расходу. Чтобы избавиться от нелинейности уравнения, пренебрежём членами, содержащими произведения приращений неизвестных величин (как величинами второго порядка малости). Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (92) |

Запишем полученное уравнение через коэффициенты:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (93) |

где ;

;

;

.

Если записать это уравнение в виде, пригодном для решения методом Ньютона-Рафсона, то получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (94) |

где

.

**Уравнение сохранения энергии**

Рассмотрим уравнение сохранения энергии для контрольного объёма в форме (65). Расходы и давления распишем через значения на предыдущем шаге по времени и приращения. Энтальпии оставим как есть (используем разделение по физическим процессам). Тогда будем иметь:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (95) |

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые перед приращениями неизвестных:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (96) |

Запишем полученное уравнение через коэффициенты:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (97) |

где ;

;

;

;

;

;

.

Если записать это уравнение в виде, пригодном для решения методом Ньютона-Рафсона, то получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (98) |

где

.

Если перегруппировать члены в , то можно переписать его в следующем удобном виде:

,

верном в общем случае, независимо от того, каким методом вычисляются коэффициенты .

**Трёхточечное уравнение для давлений**

Для того, чтобы использовать безытерационный алгоритм определения поля давления в контуре произвольной топологии, который является своеобразной модификацией метода прогонки, мы должны получить уравнение, связывающее давления в трёх соседних контрольных объёмах канала.

Исключим энтальпию из уравнения сохранения массы (89). Для этого выразим приращение энтальпии из уравнения сохранения энергии (98):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (99) |

Подставим это приращение энтальпии в уравнение (89). Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (100) |

Сгруппируем члены перед неизвестными:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (101) |

Переобозначим коэффициенты, добавив один штрих. Тогда получим уравнение сохранения массы для контрольного объёма в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (102) |

Запишем уравнение сохранения массы для ячейки с номером (i) и гидравлических связей с номерами (i) и (i+1):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (103) |

Выразим из первого и третьего уравнений расходы в гидравлических связях через давления в ячейках:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (104) |

Подставим эти расходы во второе уравнение системы (103):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (105) |

Раскроем скобки и сгруппируем члены перед приращениями давлений:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (106) |

Переобозначим коэффициенты, добавив два штриха. Тогда получим искомое трёхточечное уравнение для давлений:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (107) |

где ;

;

;

;

;

;

;

;

;

.

Таким образом, в это комплексное уравнение входят члены из исходных уравнений сохранения массы, импульса и энергии. В процессе итераций метода Ньютона-Рафсона при нахождении поля давления мы должны также рассчитывать энтальпии, поскольку они входят в коэффициенты с индексом «h», а от них зависят коэффициенты трёхточечного уравнения для давлений. Этот расчёт энтальпий осуществляется с использованием уравнения (99).

**Трёхточечное уравнение для энтальпий**

После определения поля давлений и расходов на следующем шаге по времени осуществляется определение поля энтальпий в контуре. Применяется алгоритм, аналогичный безытерационному алгоритму вычисления поля давлений. Для его использования требуется получить уравнение, связывающее энтальпии в трёх соседних ячейках каналов. Рассмотрим уравнение сохранения энергии в форме (65). Расходы и давления считаем найденными. Тогда:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (108) |

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые перед приращениями энтальпий в соседних ячейках. Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (109) |

Перепишем полученное уравнение с использованием коэффициентов:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (110) |

где ;

;

;

.

Таким образом, получаем искомое трёхточечное уравнение для энтальпий в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (111) |

где

– то же самое, что и в уравнении (98).

**Уравнение сохранения массы пассивной примеси (трёхточечное уравнение)**

Концентрации пассивных примесей на следующем шаге по времени рассчитываются после определения полей давлений, расходов и энтальпий на следующем шаге по времени (расщепление по физическим процессам). Для нахождения конечно-разностного уравнения для концентраций рассмотрим уравнение в форме (82):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (112) |

Запишем относительно неизвестных приращений концентрации пассивной примеси:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (113) |

Запишем через коэффициенты:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (114) |

где ;

;

;

.

Получаем уравнение для приращений концентраций в методе Ньютона-Рафсона:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (115) |

где .

**Что нового появилось в уравнениях сохранения относительно реализованного в первой версии ТГ кода?**

Сравним найденные уравнения и то, что сейчас реализовано в теплогидравлическом коде. Отметим в первую очередь, что в первой версии ТГ кода реализована схема с разностями против потока. В принятой здесь терминологии это означает, что используются следующие соотношения для коэффициентов аппроксимации скалярных величин на границах контрольного объёма:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (116) |

**Что добавляется в основное уравнение сохранения массы?**

Рассматривая уравнения (88) и (89), видим, что изменились члены и . Изменения связаны с появлением слагаемых, учитывающих конечную жёсткость стенки и вообще изменение площади проходного сечения во времени.

**Что добавляется в основное уравнение сохранения импульса?**

Рассмотрим уравнения (93) и (94). Изменения есть во всех членах. Изменение в и связаны с учётом конечной жёсткости стенок канала. В добавляются члены, учитывающие производную плотности по времени в соседних с гидравлической связью ячейках, учитывающие конечную жёсткость стенок канала, а также производные , и . Соответственно, эти же эффекты вносят вклад в член .

**Что добавляется в основное уравнение сохранения энергии?**

Рассмотрим уравнения (97) и (98). В члены и добавляются слагаемые, учитывающие производную . В член добавляются слагаемые, учитывающие производную . Кроме того, учёт производной приводит к появлению дополнительных членов и . Соответственно, вклад всех этих слагаемых также учитывается в члене . Кроме того, в также добавляется осевой тепловой поток .

**Как изменяется трёхточечное уравнение для давлений?**

Изменяются члены и . В них добавляются слагаемые и , которые, в свою очередь, связаны с членами и которые появляются в уравнении сохранения энергии при учёте в нём производной .

**Как изменяется трёхточечное уравнение для энтальпий?**

В члене учитываются дополнительные слагаемые, связанные с производной и осевым тепловым потоком .

**Как изменяется трёхточечное уравнение для концентраций?**

Никак. Это единственное уравнение, которое не изменяется.

**Возможности пользователя по учёту дополнительных слагаемых**

Сведём в одну таблицу различные опции по учёту дополнительных членов в уравнениях сохранения, которые будут доступны пользователю теплогидравлического кода. Здесь же отобразим, какие члены в коде при этом будут изменяться. Полужирным шрифтом выделим добавленные члены.

Таблица 1 – Влияние учитываемых физических эффектов на члены уравнения сохранения

|  |  |
| --- | --- |
| Учитываемый физический эффект | Какие члены изменяются? |
| Конечная жёсткость стенки и изменение площади проходного сечения во времени | , , , , , |
| Производная плотности по времени | , |
| **Производная расхода по длине** | **,** |
| **Производная плотности по длине** | **,** |
| **Производная площади по длине** | **,** |
| **Производная давления по длине** | **, , , + новые члены и в основном уравнении сохранения энергии; новые члены и в уравнении сохранения массы после подстановки туда уравнения сохранения энергии; и в трёхточечном уравнении для давлений; в трёхточечном уравнении для энтальпий** |
| Осевой тепловой поток в жидкости | в основном уравнении сохранения энергии; в трёхточечном уравнении сохранения для энтальпий |

**Уравнение сохранения массы для узла**

Для использования безытерационного метода расчёта поля давления в контуре произвольной топологии необходимо получить уравнение сохранения массы для узла. Принципиально это уравнение будет иметь тот же вид, что и уравнение сохранения массы для контрольного объёма (12). Разность входящего и выходящего расходов заменим на разность суммы входящих и суммы выходящих расходов. Для узла не существует такой характеристики, как площадь проходного сечения. Вместо этого заменим её на объём:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (117) |

Тогда уравнение сохранения массы для узла запишем в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (118) |

Уравнение сохранения энергии для узла запишем аналогично (65), но без учёта градиента давления по длине (потому что для узла непонятно, как аппроксимировать производную давления по длине без задания конкретной геометрии узла). Будем также считать, что для узла возможно задание только объёмного тепловыделения. Тогда уравнение сохранения энергии для узла запишем в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (119) |

Приведём уравнения (118) и (119) к конечно-разностному виду. Уравнение сохранения массы перепишем так:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (120) |

Раскроем скобки, умножим обе части уравнения на объём узла и приведём подобные слагаемые, выделив множители перед приращениями неизвестных величин. Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (121) |

Запишем через коэффициенты:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (122) |

где ;

;

;

;

.

Запишем через приращения на итерации метода Ньютона-Рафсона:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (123) |

где

Теперь рассмотрим уравнение сохранения энергии (119). Для безытерационного метода расчёта поля давления распишем расходы и давления на следующем шаге по времени, а энтальпии трогать не будем, то есть используем идею разделения по физическим процессам. Тогда получим следующее уравнение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (124) |

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые перед приращениями неизвестных. Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (125) |

Запишем полученное уравнение через коэффициенты:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (126) |

где ;

;

;

;

.

Запишем уравнение (126) через изменения приращений неизвестных величин на итерации метода Ньютона-Рафсона:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (127) |

где .

Исключим из уравнения сохранения массы для узла (123) приращение энтальпии. Для этого выразим это приращения из уравнения сохранения энергии (127):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (128) |

Подставим (128) в (123):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (129) |

Сгруппируем слагаемые:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (130) |

Переобозначим коэффициенты, добавив один штрих:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (131) |

где ;

;

;

.

Получим ещё уравнение сохранения энергии для узла. Будем считать найденными расходы в гидравлических связях на следующем слое по времени. Запишем уравнение (119) в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (132) |

Раскрываем скобки и получаем следующее уравнение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (133) |

Запишем через коэффициенты:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (133) |

где ;

;

;

.

В виде, пригодном для использования метода Ньютона-Рафсона:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (134) |

где .

**Изменения уравнений при использовании модели несжимаемой жидкости**

Основным предположением в модели несжимаемой жидкости является отсутствие зависимости плотности от давления, то есть . Рассмотрим полученные выше основные уравнения сохранения и выясним, на что повлияет принятие подобного предположения.

Если в исходном уравнении сохранения массы добавить множитель , отвечающий за использование модели несжимаемой жидкости, то получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (135) |

Приведём это уравнение к виду, аналогичному (88). Тогда для несжимаемой жидкости, для которой , получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (136) |

где

Если записать это уравнение в виде, пригодном для решения методом Ньютона-Рафсона, то получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (137) |

где

Таким образом, в уравнении сохранения массы упрощается член и исчезает связь с приращением энтальпии в контрольном объёме.

Рассмотрим уравнение сохранения импульса. В уравнении (20) исчезнет член

, а в остальном оно не изменится. Соответственно, в преобразованном уравнении (91) исчезнет член . Тогда итоговое уравнение сохранения импульса для несжимаемой жидкости будет иметь вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (138) |

где ;

;

;

.

В целом вид этого уравнения изменяется очень незначительно, и почти все дополнительные члены сохраняются.

Рассмотрим уравнение сохранения энергии. В результате анализа вывода уравнения видно, что члены, содержащие производные плотности, сокращаются. В результате это уравнение сохраняет вид (97) и (98).

Проанализируем получение трёхточечного уравнения для давлений. Его получение упрощается, поскольку уравнение сохранения массы не содержит энтальпии. Запишем уравнения (137) и (138) для ячейки канала и левой и правой гидравлических связей:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (139) |

Выразим из первого и третьего уравнения системы расходы и подставим во второе уравнение. Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (140) |

Приводим слагаемые перед давлениями:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (141) |

или в виде трёхточечного уравнения

|  |  |
| --- | --- |
|  | (142) |

где ;

;

;

.

Таким образом, для модели несжимаемой жидкости трёхточечное уравнение для давлений получается сразу с использованием коэффициентов уравнений сохранения массы и импульса.

Из вывода видно, что трёхточечные уравнения для энтальпий и концентраций пассивных примесей не изменяются.

Уравнение сохранения массы для узла будет иметь следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (143) |

где ;

;

;

.